Constantes de Seshadri du diviseur anticanonique des surfaces de del Pezzo

Amaël BROUSTET

8 février 2008

Abstract. Seshadri constants, introduced by Demailly, capture positivity of a nef divisor at a point. We compute in this note the Seshadri constants of the anticanonical bundle at every point of Del Pezzo surfaces. During the proof, we enlight the role of rational curves in our computations. We present then two exemples where the positivity of the anticanonical bundle cannot be detected using rational curves.

1 Introduction

Le concept de positivité locale, introduit par J.P Demailly [D1], consiste à mesurer au travers des constantes de Seshadri la positivité d'un diviseur nef en un point.

Définition 1.1 Soit X une variété projective lisse, x un point de X et D un diviseur nef sur X. La constante de Seshadri en x de D est le réel positif :

$$\varepsilon(D; x) = \inf_{x \in C \subset X} \frac{D \cdot C}{\operatorname{mult}_x C}$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des courbes irréductibles $C \subset X$ passant par x.

Pour plus d'informations sur les constantes de Seshadri, on recommande le chapitre 5 de [L].

Si x est un point en position générale, la constante ne dépend pas du point. Dans cette note, on calcule *en tout point* les constantes de Seshadri du diviseur anticanonique des surfaces de del Pezzo lisses. On peut dans notre cas donner une définition précise de la notion de point en position générale.

Définition 1.2 Dans la suite, on notera $\mu_r: X_r \longrightarrow \mathbb{P}^2$ l'éclatement du plan en r points distincts x_1, \ldots, x_r . Un ensemble de $r \leq 8$ points $\{x_1, \ldots, x_r\}$ du plan est dit en position générale si aucun sous-ensemble de 3 de ces points n'est sur une droite, si aucun sous-ensemble de 6 d'entre eux n'est sur une conique et si 8 d'entre eux ne sont pas sur une cubique singulière en l'un deux. Lorsque $r \leq 7$, un point x de X_r sera dit en position générale si son image y par μ_r est distincte des points d'éclatement x_i et si les points $\{x_1, \ldots, x_r, y\}$ sont en position générale. Si le point x n'est pas en position générale, il est alors sur une courbe exceptionnelle ou sur la transformée stricte d'une des courbes précédemment citée. On appelle cette courbe la courbe distinguée contenant x.

 ${\bf Key\text{-}words:} \ {\bf Seshadri\ constants}, \ {\bf rational\ curves}.$

A.M.S. classification: 14J26, 14J45.

On montre le résultat suivant :

Théorème 1.3 Si $r \leq 5$, la constante de Seshadri de $-K_{X_r}$ au point x vaut :

- $\varepsilon(-K_{X_r};x)=2$ si x est en position générale,
- $\varepsilon(-K_{X_r};x)=1$ sinon.

Si r=6, la constante de Seshadri de $-K_{X_6}$ au point x vaut :

- $\varepsilon(-K_{X_6};x)=3/2$ si x est en position générale,
- $\varepsilon(-K_{X_6};x)=1$ sinon.

Si r = 7, la constante de Seshadri de $-K_{X_7}$ au point x vaut :

- $\varepsilon(-K_{X_7};x)=4/3$ si x est en position générale,
- $\varepsilon(-K_{X_7};x)=1$ sinon.

Si r = 8, les constantes de Seshadri de $-K_{X_8}$ valent $\frac{1}{2}$ en au plus 12 points n'appartenant pas au diviseur exceptionnel et 1 partout ailleurs.

Au cours de la preuve du théorème 1.3, nous mettrons en relief le rôle des courbes rationnelles dans le calcul des constantes de Seshadri. Plus exactement nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 1.4 Si S est une surface de del Pezzo lisse

$$\varepsilon(-K_S; x) = \inf_{x \in C \text{ rationnelle}} \frac{-K_S \cdot C}{\text{mult}_x C}.$$

Malheureusement, les courbes rationnelles ne permettent en général pas de détecter la positivité sur une variété rationnellement connexe. On donne à la fin de cette note deux exemples de surfaces rationnellement connexes dont le diviseur anticanonique possède une intersection positive avec toute courbe rationnelle mais n'est pas pas nef, ni même pseudoeffectif dans le cas du deuxième exemple.

2 Constantes de Seshadri du diviseur anticanonique des surfaces de Fano

Le théorème suivant ([F], théorème 1 page 110) servira dans la suite :

Théorème 2.1 Soit x_1, \ldots, x_n n points distincts de \mathbf{P}^2 . On note $V(d; r_1x_1, \ldots, r_nx_n)$ l'espace projectif des courbes de degré d et de multiplicité au moins r_i en x_i . C'est un sous-espace projectif de $\mathbf{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$ et

$$\dim V(d; r_1 x_1, \dots, r_n x_n) \geqslant \frac{d(d+3)}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{r_i(r_i+1)}{2}.$$

En particulier $V(d; r_1x_1, \ldots, r_nx_n)$ n'est pas vide si $\frac{d(d+3)}{2} \geqslant \sum_{i=1}^n \frac{r_i(r_i+1)}{2}$.

De même, on utilisera aussi la proposition suivante ([D2], théorème 1 p39).

Proposition 2.2 Soient x, x_1, \ldots, x_7 huit points du plan tels que :

- quatre de ces points ne soient pas alignés,
- aucune conique ne passe par 7 d'entre eux.

Alors il existe une cubique lisse passant par ces huit points.

2.1 Preuve du théorème 1.3

Le cas $r \leq 6$. Le diviseur anticanonique $-K_{X_r}$ est très ample donc $\varepsilon(-K_{X_r}; x) \geq 1$ pour tout point x. Si x n'est pas en position générale, la courbe distinguée C contenant x vérifie $-K_X \cdot C = 1$. On en déduit que $\varepsilon(-K_{X_r}; x) = 1$

Si x est en position générale, il existe alors un membre irréductible et réduit $D_x \in |-K_{X_r}|$ vérifiant $\operatorname{mult}_x D_x = 2$. Supposons ceci vrai pour le moment, on a alors pour toute courbe C contenant x différente du support de D_x

$$D_x \cdot C \geqslant 2 \operatorname{mult}_x C$$
.

De plus $D_x^2=9-r\geqslant 4$ si $r\leqslant 5$ et $D_x^2=6$ si r=6. D'où $\varepsilon(-K_{X_r};x)=2$ si $r\leqslant 5$ et $\varepsilon(-K_{X_r};x)=\frac{3}{2}$ si r=6.

Il reste à montrer l'existence de D_x . D'après 2.1, il existe une courbe plane D passant par tous les x_i et dont la multiplicité au point x est supérieure à 2. Il suffit de vérifier que $\operatorname{mult}_{\mu_r(x)}D\leqslant 2$ et que D est bien irréductible et réduite, D_x sera alors la transformée stricte de D. Quitte à compléter l'ensemble des points x_i , on peut supposer r=6. Si D n'est pas irréductible et réduite, D est l'union de trois droites ou d'une droite et d'une conique. Par la position générique de l'ensemble de points $\{x_1,\ldots,x_6,x\}$, la courbe D ne peut alors passer par tous les points avec la multiplicité prescrite.

La courbe D étant irréductible, son intersection avec une droite L passant par $\mu_r(x)$ et un autre point $z \in D$ vaut au moins

$$D \cdot L = \operatorname{mult}_z D + \operatorname{mult}_{\mu_r(x)} D$$

et au plus 3. On en déduit que $\operatorname{mult}_{\mu_r(x)} D \leq 2$ et que z est un point lisse de D.

Le cas r=7 Pour tout point $x \in X_7$, la proposition 2.2 implique l'existence d'un membre $D_x \in |-K_{X_7}|$ passant par x et lisse au point x, d'où $\varepsilon(-K_{X_r};x) \ge 1$. Si le point x n'est pas en position générale, on déduit comme précédemment que $\varepsilon(-K_{X_r};x) = 1$.

Si le point x est en position générale, il existe un membre irréductible et réduit $D_x \in |-2K_x|$ dont la multiplicité en x vaut 3. Cela revient à prouver l'existence d'une courbe plane de degré 6 irréductible, réduite de multiplicité 3 en $\mu_7(x)$ et de multiplicité 2 au points x_i . Le théorème 2.1 implique l'existence d'une courbe plane D de degré 6 et de multiplicités au moins égales à celles attendues aux points x_i et $\mu_7(x)$. Si cette courbe est irréductible et réduite, son intersection avec une cubique passant par les 8 points $x_1, \ldots, x_7, \mu_7(x)$ et un neuvième sur la courbe D vaut 18 d'après le théorème de Bézout. On en déduit que mult $_{x_i}D=2$ pour tout i et que mult $_{\mu_r(x)}D=3$. Il reste à montrer que cette courbe est irréductible et réduite. Si la courbe D était l'union de deux cubiques C_1 et C_2 (éventuellement non irréductibles ou non réduites), les points x_1, \ldots, x_7 étant en position générale, on aurait alors

$$17 = \sum_{i \leqslant 7} \operatorname{mult}_{x_i} D + \operatorname{mult}_{\mu_7(x)} D = \sum_{j=1,2} \sum_{i \leqslant 7} \operatorname{mult}_{x_i} C_j + \operatorname{mult}_{\mu_7(x)} C_j \leqslant 2 \times 8.$$

Si D n'est pas irréductible, D est donc soit l'union de 3 coniques soit l'union d'une quintique réduite irréductible et d'une droite ou d'une quartique réduite irréductible et d'une conique. En intersectant cette quintique Q avec une cubique

C passant par tous les points x_1, \ldots, x_7, x et un autre point de la quintique, on obtient d'après le théorème de Bézout

$$\sum_{i \le 7} \operatorname{mult}_{x_i} Q + \operatorname{mult}_{\mu_7(x)} Q \leqslant 15 - 1 = 14.$$

Encore une fois, on aurait dans ce cas

$$\sum_{i \le 7} \operatorname{mult}_{x_i} D + \operatorname{mult}_{\mu_7(x)} D \le 16$$

ce qui n'est pas possible. On procède de même pour les cas où D est l'union d'une quartique et d'une conique et où D est l'union de 3 coniques. Le diviseur D_x est donc irréductible et réduit. Comme au paragraphe précédent, on en conclut que $\varepsilon(-K_{X_r};x)=\min\{\frac{3}{2},\frac{D_x^2}{3}\}=\frac{4}{3}$. De même qu'au paragraphe précédent, la courbe D qui permet "d'atteindre" la constante de Seshadri est rationnelle.

Le cas r=8. Le système linéaire $|-K_{X_8}|$ est sans point base, de plus ses membres sont irréductibles et réduits grâce à la position générale des points x_1,\ldots,x_6 . On en déduit que $\varepsilon(-K_{X_r};x)=1$ sauf aux éventuels points singuliers des membres de $|-K_{X_8}|$. Mais d'après la position générale des points x_1,\ldots,x_6 ces points singuliers sont en dehors du diviseur exceptionnel de μ_r et correspondent aux singularités des cubiques du pinceau de cubiques passant par les x_i . Le nombre de cubiques singulières dans un pinceau général de cubique est un problème classique de géométrie énumérative et vaut 12. En ces points la constante de Seshadri de $-K_{X_8}$ vaut $\frac{1}{2}$.

Contrairement aux cas précédents, il n'existe en général pas pour les constantes de Seshadri de $-K_{X_8}$ de courbe rationnelle Γ telle que

$$\varepsilon(-K_{X_8};x) = \frac{-K_{X_8} \cdot \Gamma}{\operatorname{mult}_x \Gamma}.$$

Pour voir cela, on peut notamment utiliser le lemme 3.1.

On peut cependant noter qu'il existe une suite (Γ_k) de courbes rationnelles telles que

$$\varepsilon(-K_{X_8};x) = \lim_{k \to \infty} \frac{-K_{X_8} \cdot \Gamma_k}{\operatorname{mult}_x \Gamma_k}.$$

C'est une conséquence directe de [GLS], lemme 3.2.10 :

Lemme 2.3 Soit \bar{X} l'éclatement de $\mathbf{P^2}$ en 9 points en position générale, on note E_0 le tiré en arrière de $\mathcal{O}_{\mathbf{P_2}}(1)$, et E_i la préimage du point d'éclatement x_i . Pour tout entier $m \geq 1$ il existe une courbe rationnelle nodale irréductible dans le système

$$|3mE_0 - mE_1 - \ldots - mE_8 - (m-1)E_9|$$
.

3 Positivité et courbes rationnelles

3.1 Un exemple de surface rationnelle dont le diviseur anticanonique n'est pas nef mais s'intersecte positivement avec toute courbe rationnelle

Soient 9 points en position très générale dans \mathbb{P}^2 de sorte que par ces 9 points passe une unique cubique lisse C. On complète ces neuf points par un dixième toujours sur C et on note $\mu: X \longrightarrow \mathbf{P}^2$ l'éclatement du plan en ces 10 points. La transformée stricte C' de C par μ est un membre irréductible de $|-K_X|$ dont l'intersection avec toute courbe rationnelle est strictement positive. Cependant, comme $-K_X^2 = C'^2 = -1, -K_X$ n'est pas nef.

3.2 Un exemple de surface rationnelle dont le diviseur anticanonique n'est pas pseudoeffectif mais s'intersecte positivement avec toute courbe rationnelle

Soient 13 points x_1, \ldots, x_{13} en position très générale dans \mathbb{P}^2 de sorte qu'entre autre, passe par ces 13 points un pinceau de quartiques et aucune cubique. On note $\mu: X \longrightarrow \mathbf{P}^2$ l'éclatement du plan en ces 13 points. Puisque la transformée stricte C par μ de toute quartique passant par ces 13 points vérifie $-K_X \cdot C = -1$ et que ces courbes couvrent un ouvert dense de X, le diviseur anticanonique n'est pas pseudoeffectif. Cependant, le diviseur anticanonique de X s'intersecte positivement avec toute courbe rationnelle, comme le montre le lemme suivant ([GP] lemme 4.2 page 74):

Lemme 3.1 Soit un couple (d, α) , où d est un entier strictement positif et α un r-uplet $\alpha = (a_1, \ldots, a_r)$. On note X_r l'éclatement de \mathbf{P}^2 en r points distincts en position très générale, H le tiré en arrière d'un diviseur hyperplan de \mathbf{P}^2 , E_i la préimage du point d'éclatement x_i . On désigne par $\bar{M}_{(0,0)}(X_r)(d,\alpha)$ l'espace de modules des courbes stables non pointées de genre 0 et de classe $dH - \sum_{i=1}^r a_i E_i$. Si $3d-1-\sum a_i < 0$ alors $\bar{M}_{(0,0)}(X_r)(d,\alpha)$ est vide.

En effet, si C est une courbe rationnelle (irréductible et réduite) s'intersectant négativement avec l'anticanonique de X, l'image de C dans \mathbf{P}^2 est alors une courbe rationnelle Γ de degré d et de multiplicité a_i aux points x_i vérifiant

$$3d - \sum_{i=1}^{13} a_i \leqslant 0.$$

Or une telle courbe n'existe pas d'après le lemme précédent.

Références

- [D1] J.P. Demailly. Singular Hermitian metrics on positive line bundles, Complex algebraic varieties, Proc. Conf., Bayreuth/Ger. 1990, Lect. Notes Math. 1507, 87-104. 1992.
- [D2] M. Demazure. Surfaces de Del Pezzo. I-V, Sémin. sur les singularités des surfaces, Cent. Math. Ec. Polytech., Palaiseau 1976-77, Lect. Notes Math. 777, 21-69. 1980.

- [F] W. Fulton. Algebraic curves, Mathematics Lecture Note Series, New York-Amsterdam: W.A. Benjamin, Inc. XIII. 1969.
- [GLS] G.M. Greuel, C. Lossen et E. Shustin. Geometry of families of nodal curves on the blown-up projective plane, Trans. Am. Math. Soc. 350, No.1, 251-274. 1998.
- [GP] L. Göttsche et R. Pandharipande. The quantum cohomology of blow-ups of \mathbf{P}^2 and enumerative geometry, J. Differ. Geom. 48, No.1, 61-90. 1998.
- [L] R. Lazarsfeld. Positivity in algebraic geometry. I. Classical setting: line bundles and linear series, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 48, Berlin: Springer. 2004.

$A.B.\ \textit{e-mail}: \textit{broustet@ujf-grenoble.fr}$

Institut Fourier, UFR de Mathématiques, Université de Grenoble 1, UMR 5582, BP 74, 38402 Saint Martin d'Hères, FRANCE